PRODUIT SCALAIRE - Partie 1-

I. Rappels et Définition

1) Norme d'un vecteur

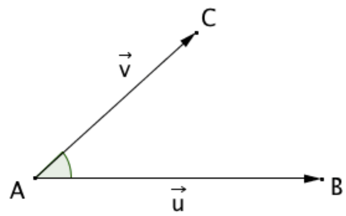
Définition 1 : On appelle **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on note $\|\overrightarrow{AB}\|$ la distance AB.

Définition 2 : L'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note **($\vec{u}\,;\vec{v}$)**

2) Définition du produit scalaire

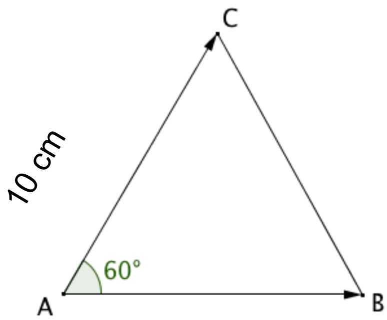
Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$, dans le cas contraire.



$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

Exemple : Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus
Soit un triangle équilatéral ABC de côté 10 cm.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !
Exercices : n° 23 et 24 page 243.

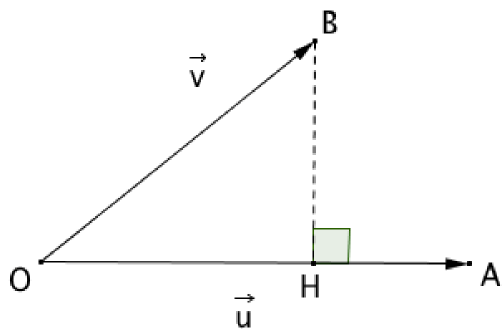
II. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

2) Projection orthogonale

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}}$



Exercices : n° 38, 40 et 47 pages 244 et 245.

III. Propriétés du produit scalaire

Propriété de **symétrie** : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$

Propriétés de **bilinéarité** : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\boxed{\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}}$ 2) $\boxed{\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}}$, avec k un nombre réel.

IV. Produit scalaire et norme

1) Propriétés

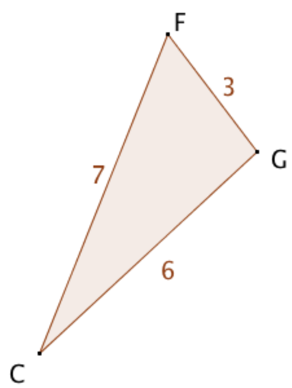
Soit un vecteur $\vec{u}$, on a :
$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u}\ ;\ \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$
et
$\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$
On a ainsi : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Propriété 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Propriété 2 : Soit A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

Exemple : Calculer un produit scalaire à l'aide des normes



On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.

$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(CG^2 + CF^2 - GF^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(6^2 + 7^2 - 3^2\right)$
$= 38$

Exercice : n° 51 page 246.

V. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

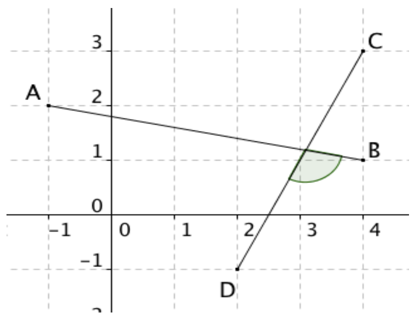
Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$.
On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère étant normé et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$, le repère étant orthogonal.

Exemple 1 : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées
Soit $\vec{u}(5\,;\,-4)$ et $\vec{v}(-3\,;\,7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} =$

Exemple 2 : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire
Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right)$ en calculant d'abord le produit scalaire avec les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.
A vous de jouer !



On doit trouver à la fin : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) \approx 105{,}3°$.

Exercice : n° 54 page 246 + 21 page 243.